

CURSO : MA22A-03 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 4 / 4 / 2001

TIEMPO : 2,5 HORAS

CONTROL #1

1.- Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

Se define la distancia entre A y B como

$$d(A, B) = \inf \{ \|x - y\| / x \in A, y \in B \}$$

i) ¿Es $d(A, B)$ una métrica en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$? Justifique.

ii) Demuestre que

$$A_1 \subset A_2 \quad B_1 \subset B_2 \Rightarrow d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$$

iii) En el caso particular en que $A = \{x\}$ se define $d(x, B) = \inf \{ \|x - y\| / y \in B \}$

Muestre que:

a) Si $x \in B \Rightarrow d(x, B) = 0$

b) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow d(x, A_2) \leq d(x, A_1)$

iv) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, demuestre que

$$d(x, \overline{A}) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$$

v) Si F es cerrado, muestre que

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

vi) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$, muestre que

$$d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$$

vii) Sea $F \subset \mathbb{R}^n$, muestre que

$$d(x, F) = d(x, \overline{F})$$

2.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2) & \text{Si } x^2 + y^2 > 1 \\ \ln\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{3 - x^2 - y^2}\right) & \text{Si } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

- Determine el dominio y recorrido de la función.
- Determine y grafique las curvas de nivel.
- Grafique la función en 3-D.

3.- Para las siguientes funciones de $R^2 \rightarrow R$, estudiar los límites en el origen.

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^a}{x^2 - xy + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar en función de α .

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{Puede ser útil que } (x^2 + y^2 - y)^2 \geq 0$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{Si } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{en..otro..caso} \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^2 - y)^2}{x^7 \sqrt{x}} & \text{Si } x > 0 \wedge 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en..otro..caso} \end{cases}$$

$$1- d(A, B) = \inf \{ \|x - y\| / x \in A, y \in B \}$$

i) $d(A, B)$ no es métrica

En efecto, si $A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow d(A, B) = 0$ pero no necesariamente $A = B$

$$ii) A_1 \subset A_2 \quad B_1 \subset B_2 \Rightarrow d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$$

$$\begin{aligned} \text{dem} \\ d(A_2, B_2) &= \inf \{ \|x - y\| / x \in A_2, y \in B_2 \} \\ &\leq \inf \{ \|x - y\| / x \in A_2 \cap A_1, y \in B_2 \cap B_1 \} \end{aligned}$$

pero $A_1 \cap A_2 = A_1$

$B_1 \cap B_2 = B_1$

$$= \inf \{ \|x - y\| / x \in A_1, y \in B_1 \}$$

$$\Rightarrow d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1) \quad \square$$

$$iii) \text{ Si } A = \{x\} \quad d(x, B) = \inf \{ \|x - y\| / y \in B \}$$

$$a) x \in B \Rightarrow d(x, B) = 0$$

dem

$$d(x, B) = \inf \{ \|x - x\|, y \in B \} = \inf \{ \|0\|, y \in B \} = 0 \quad \square$$

$$b) A_1 \subset A_2 \Rightarrow d(x, A_2) \leq d(x, A_1)$$

Trivial aplicando ii)

$$iv) A \subset \mathbb{R}^n$$

$$d(x, \bar{A}) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

$$\Rightarrow d(x, \bar{A}) = 0$$

$$\Rightarrow \inf \{ \|x - y\| / y \in \bar{A} \} = 0$$

Como \bar{A} es cerrado

$$\Rightarrow \inf \{ \|x - y\| / y \in \bar{A} \} = \min \{ \|x - y\| / y \in \bar{A} \} = 0$$

$$\Rightarrow \exists y \in \bar{A} \quad \|x - y\| = 0$$

$$\Rightarrow y \in \bar{A} \wedge x = y$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A}$$

\Leftarrow

$$\text{Si } x \in \bar{A} \Rightarrow d(x, \bar{A}) = 0 \text{ por iii) a)}$$

■

$$v) \text{ Si } \bar{F} \text{ cerrado} \Rightarrow d(x, \bar{F}) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{F}$$

En iv) \bar{A} es cerrado.

$$vi) d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$$

$$\Rightarrow d(\bar{A}, \bar{B}) = \inf \{ \| \bar{x} - \bar{y} \| \text{ para } \bar{x} \in \bar{A} \wedge \bar{y} \in \bar{B} \}$$

$$\Rightarrow \exists \{ x_k \} \rightarrow \bar{x} \quad \text{con } x_k \in A$$

$$\exists \{ y_k \} \rightarrow \bar{y} \quad \text{con } y_k \in B$$

$$\Rightarrow \| x_k - y_k \| \rightarrow \| \bar{x} - \bar{y} \|$$

$$\Rightarrow \inf \| x_k - y_k \| = \| \bar{x} - \bar{y} \| = d(\bar{A}, \bar{B})$$

$$\text{pero } \begin{matrix} A \subset \bar{A} \\ B \subset \bar{B} \end{matrix} \Rightarrow d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, B) \Rightarrow d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$$

$$vii) d(x, F) = d(x, \bar{F})$$

Trivial por vi)

2-

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(x^2+y^2) & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ \ln\left(\frac{1+x^2+y^2}{3-x^2-y^2}\right) & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$

Rec f : si $x^2+y^2=0 \Rightarrow f(x,y) = \ln(1/3) = -\ln 3$

$\Rightarrow \text{Rec } f = [-\ln 3, +\infty[$

b) si $1 < x^2+y^2$

$\Rightarrow \ln(x^2+y^2) = k$

$x^2+y^2 = e^k = [e^{k/2}]^2$

pero $1 < x^2+y^2 = e^k \Rightarrow k > 0$

si $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$

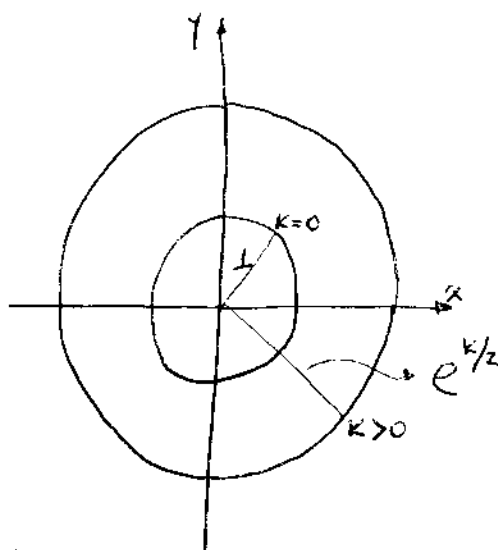
$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x^2+y^2}{3-(x^2+y^2)}\right) = k$

$\frac{1+x^2+y^2}{3-(x^2+y^2)} = e^k$

$1+x^2+y^2 = 3e^k - e^k x^2 - e^k y^2$

$(x^2+y^2)(1+e^k) = 3e^k - 1$

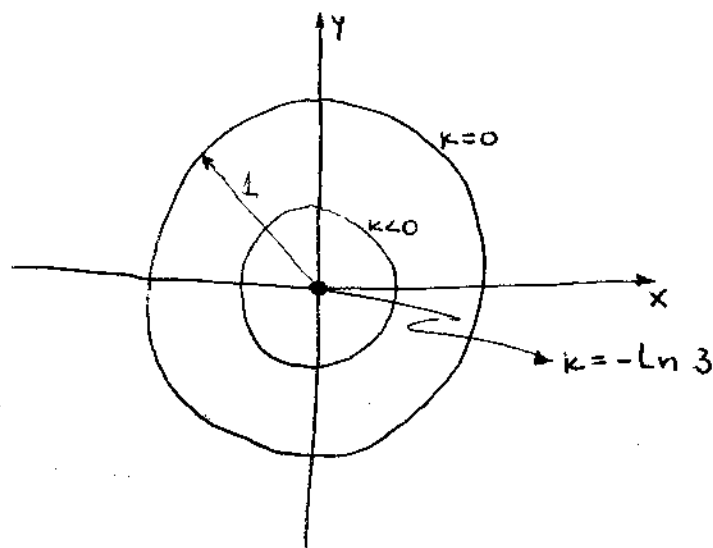
$x^2+y^2 = \frac{3e^k-1}{1+e^k}$



pero $0 \leq \frac{3e^k-1}{1+e^k} \leq 1$

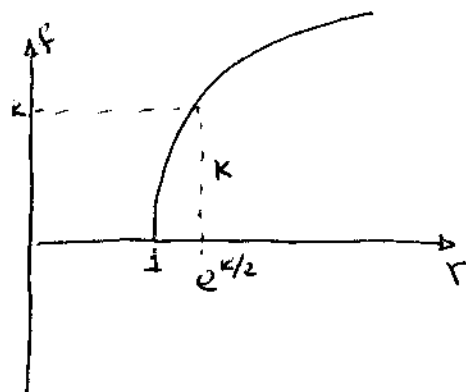
$0 \leq 3e^k-1 \leq 1+e^k$

$\frac{1}{3} \leq e^k \leq 1 \Rightarrow -\ln 3 \leq k \leq 0$



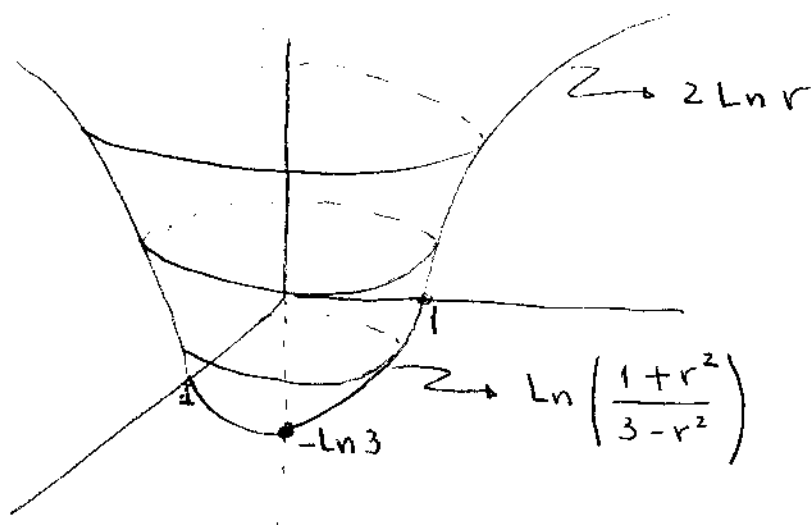
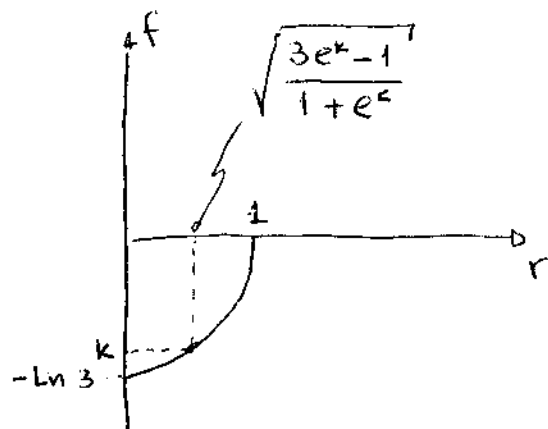
c) Para $k > 0 \Rightarrow r \geq 1$

$$f = \ln r^2 = 2 \ln r$$



Para $k \leq 0 \Rightarrow r \leq 1$

$$f = \ln \left(\frac{1+r^2}{3-r^2} \right)$$



$$\text{com } r^2 = x^2 + y^2$$

3-

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

Si $\alpha \leq 1$ Tomando el "camino" $x=y$

$$f(x, y) = \frac{|x^2|^\alpha}{x^2 - x^2 + x^2} = (x^2)^{\alpha-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -x^{2(\alpha-1)} \text{ no existe.}$$

 $\alpha > 1$

$$\left| \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \left| \frac{|xy|^\alpha}{2xy - xy} \right| = |(xy)^{\alpha-1}| < (\|\vec{x}\|_\infty^2)^{\alpha-1} < \delta^{2(\alpha-1)} < \varepsilon$$

El límite existe para $\alpha > 1$

$$b) f(x, y) = \frac{y^2(x^2 - y)^2}{\sqrt{x^7} \cdot x^7} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ 0 < y < x^2 \end{matrix}$$



$$\begin{aligned} \left| \frac{y^2(x^2 - y)^2}{x^7 \sqrt{x^7}} - 0 \right| &= \left| \frac{y^2(x^4 + y^2 - 2x^2y)}{x^7 \sqrt{x^7}} \right| \leq \left| \frac{y^2(x^4 + y^2)}{x^7 \sqrt{x^7}} \right| < \left| \frac{y^2(x^4 + x^4)}{x^7 \sqrt{x^7}} \right| \\ &\leq \left| \frac{x^4 \cdot 2x^4}{x^{7+1/2}} \right| = \left| \frac{2x^8}{x^{15/2}} \right| = |2x^{1/2}| = 2\|\vec{x}\|_\infty^{1/2} < 2\sqrt{\delta} = \varepsilon \\ &\Rightarrow \delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$c) f(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2}$$

$$((x^2 + y^2)^2 - y^2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 + y^2 - 2(x^2 + y^2)y \geq 0$$

$$\left| \frac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{\cancel{y}(x^2 + y^2)^{3/2}}{2(x^2 + y^2)\cancel{y}} \right| = \frac{1}{2} \left| (x^2 + y^2)^{1/2} \right| = \frac{1}{2} \|\vec{x}\|_2 < \|\vec{x}\|_2 < \delta = \varepsilon$$

$$d) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$\text{Si } y = x^2$$

$$\lim_{y, x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

El límite no existe.